ESQUEMA PARA RESOLVER LÍMITES

RECORDAR

Si $l \neq 0$ y (*) representa un límite:

$\frac{(l)}{(\pm\infty)} = (0)$; $\frac{(l)}{(0)} = (\pm\infty)$, $\frac{(\pm\infty)}{(0)} = (\pm\infty)$; $\frac{(0)}{(\pm\infty)} = (0)$;

$(+\infty)^{(+\infty)} = (+\infty)$; $(+\infty)^{(-\infty)} = (0)$; $(+\infty)^{(l)} = \begin{cases} (+\infty) & si \quad l > 0 \\ (0) & si \quad l < 0 \end{cases}$ $(l)^{(0)} = (1)$;

$(l)^{(+\infty)} = \begin{cases} (+\infty) & si \quad l > 1 \\ (0) & si \quad 0 < l < 1 \end{cases}$; $(l)^{(-\infty)} = \begin{cases} (0) & si \quad l > 1 \\ (+\infty) & si \quad 0 < l < 1 \end{cases}$

LÍMITES SENCILLOS cuando $x \to \infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$, si $k > 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & si \quad a > 1 \\ 0 & si \quad 0 < a < 1 \\ \nexists & si \quad a < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & si \quad a > 1 \\ -\infty & si \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

ÓRDENES cuando $x \to \infty$

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \pm\infty$ y $f(x)$ es ***infinito de orden superior*** a $g(x)$, se cumple que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.

De menor a mayor orden:

Funciones logarítmicas $f(x) = (\log_a x)^n$, a>1, n>0	Potencias $f(x) = x^n$ n>0	Funciones exponenciales de base a >1 $f(x) = a^x$	Potencial-exponencial $f(x) = x^{ax}$, a>0

INDETERMINACIONES

$(+\infty)-(+\infty)$; $(\pm\infty)\cdot(0)$; $\frac{(0)}{(0)}$; $(+\infty)^{(0)}$; $(+\infty)^{(0)}$; $(1)^{(+\infty)}$; $(1)^{(-\infty)}$; $(0)^{(0)}$; $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$

Si $x \to +\infty$

- Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{ax^m + \cdots}{bx^n + \cdots} \Rightarrow \begin{cases} si \quad m > n \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \\ si \quad n = m \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{a}{b} \\ si \quad m < n \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$
- Lo anterior es válido para $\sqrt[p]{ax^n}$ que se comporta como $\sqrt[p]{a} \cdot x^{\frac{n}{p}}$ (siempre que p sea par y $a > 0$ o bien p impar)

- Diferencia entre infinitos $(\infty - \infty)$
$$\begin{cases} CASO\ I : son\ de\ diferente\ orden \Rightarrow se\ atribuye\ (+\infty)\ o\ (-\infty)\ directamente \\ CASO\ II : son\ del\ mismo\ orden \begin{cases} No\ hay\ radicales \to se\ opera \\ Hay\ radicales \to multiplicar\ y\ dividir\ por\ el\ conjugado \end{cases} \end{cases}$$

- Obtengo $(1)^{(+\infty)}$. Se aplica el siguiente resultado Θ:
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 1] \cdot g(x)}$
- *Teorema cero por acotada*:
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ y $|g(x)| = k,\ k \in \mathbf{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$
(recordar que *sen x* y *cos x* son funciones acotadas)

- También se puede utilizar la tabla de infinitos equivalentes.
- Si no sale con ningún caso anterior intentaremos utilizar L'Hôpital (se verá en derivadas).

Si $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$$

Si $x \to c$

- $Si \quad f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow \begin{cases} Si\ Q(c)\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x)=\dfrac{P(c)}{Q(c)} \\ Si\ Q(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} Si\ P(c)\neq 0 \Rightarrow Estudiar\ limites\ laterales\ \ (\pm\infty) \\ Si\ P(c)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{(**)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-c)\cdot P_1(x)}{(x-c)\cdot Q_1(x)} \end{cases} \end{cases}$

  (**) Factor común, Rufinni, resolviendo la ecuación…
- Si $f(x)=\dfrac{\sqrt[a]{P(x)}}{\sqrt[b]{Q(x)}}$ se reduce a índice común con el mcm(*a,b*) y se procede como el caso anterior.
- Si hay radicales y obtenemos $\dfrac{0}{0}$ se multiplica y divide por el conjugado
- Para $(+\infty)-(+\infty)$, se operan las expresiones.
- Para $(1)^{(+\infty)}$ se aplica el resultado Θ sustituyendo $x\to+\infty$ por $x\to c$
- Saber de memoria: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=1$; o bien $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$ y $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-\cos f(x)}{f(x)}=1$ con $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.
- Tipo 0 · ∞ . Si obtenemos $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$, se reescribe el límite de la siguiente manera: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{1/f(x)}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Normalmente se aplica sobre polinomios y se resuelve a partir de aquí como se indicó en el primer punto.

- Se puede utilizar la tabla de infinitésimos equivalentes.
- Si no sale con nada, intentar utilizar L'Hôpital.